Плещинская И.Е. (Казань)

Метод потенциальных операторов в теории систем уравнений с частными производными

Введение

Рассматриваемый *метод потенциальных операторов* (МПО) основан на следующем определении: оператор P назовем *потенциальным* для оператора S, если найдутся такие операторы R и Q, что выполняется равенство

$$SR = QP. \qquad (A)$$

Равенство (А) устанавливает соответствие вида $u = R\varphi$ между решениями исходного операторного уравнения $Su = f$ и вспомогательного *потенциального уравнения* $P\varphi = g$. При этом подразумевается, что потенциальное уравнение является более простым или более удобным для исследования, чем исходное. Решения потенциального уравнения будем называть *потенциальными элементами*, а формулу $u = R\varphi$ – *представлением решений* исходного уравнения.

Если Q – тождественный оператор, то из (А) следует, что если φ – решение уравнения $P\varphi = f$, то $u = R\varphi$ – решение уравнения $Su = f$. Обратное утверждение не всегда имеет место. Ситуация существенно усложняется, если оператор Q не имеет обратного оператора. Но и оператор R также не обязательно однозначно обратим. Тогда решениям исходного уравнения могут соответствовать классы решений потенциального уравнения. Следовательно, метод потенциальных операторов основан, вообще говоря, на нетривиальной замене искомого элемента в операторном уравнении.

В задачах математической физики чаще всего рассматриваются дифференциальные, интегральные и другие уравнения в различных пространствах функций. В этом случае естественно говорить о МПО как о *методе потенциальных функций*. При этом *потенциальные функции* – это потенциальные элементы из области определения оператора, потенциального в смысле данного выше определения. Потенциальные операторы и определяюющие их выражения будем также называть *потенциалами*, а метод потенциальных функций – *методом потенциалов*.

· В математическом анализе термины "потенциал", "потенциальный" и "потенциальная функция" используются при описании векторных полей (см., например, [1], гл. 7, §4, п.4).

Уравнение $\operatorname{rot} p = 0$ в области Ω определяет *потенциальное поле*. Поле p является потенциальным тогда и только тогда, когда существует такая *скалярная потенциальная функция* u, что $p = \operatorname{grad} u$ в Ω. Уравнение $\operatorname{div} p = 0$ в области Ω определяет *соленоидальное поле*. Поле p является соленоидальным тогда и только тогда, когда существует такая *векторная потенциальная функция* A, что $p = \operatorname{rot} A$ в Ω. Легко видеть, что в этих двух случаях равенство (A) совпадает с одним из известных свойств повторных операций теории поля

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} u = 0, \quad \operatorname{div} \operatorname{rot} A = 0.$$

При этом Q может быть тождественным оператором, а оператор P – нулевой.

В теории нелинейных операторных уравнений [2], [3] потенциальным оператором принято называть оператор, действующий из банахова пространства X в сопряженное ему пространство X^* и совпадающий с градиентом некоторого элемента из X^*. Это определение не совпадает с предложенным выше. Но потенциальный в таком смысле оператор является значением оператора $S = \operatorname{grad}$ на функционале из X^*, то есть здесь термин "потенциальный" используется как "соответствующий некоторому потенциальному элементу".

В истоках классической теории потенциала лежит закон всемирного тяготения И.Ньютона. Ж.Лагранж показал, что поле сил тяготения является потенциальным. Дж.Грин впервые назвал потенциальную функцию поля потенциальной, а К.Гаусс - просто потенциалом.

Метод потенциальных функций был впервые применен в работах Г.Эри и Дж.Максвелла при исследовании системы основных уравнений теории упругости. Все компоненты тензора напряжений в плоской теории упругости без учета массовых сил можно выразить через вторые производные функции Эри, удовлетворяющей бигармоническому уравнению, то есть в данном случае исследуемая система имеет вид $u_{1x}+u_{2y}=0, u_{2x}+u_{1y}=0$, а ее потенциальное уравнение и представление решений соответственно запишутся следующим образом: $\Delta\Delta\varphi = 0, u_1 = \varphi_{yy}, u_2 = -\varphi_{xy}, u_3 = \varphi_{xx}$. Из формул Колосова-Мусхелишвили [4] следует, что в качестве потенциальных элементов удобно рассматривать пары аналитических функций.

При решении задачи нахождения гармонически зависящего от времени электромагнитного поля в однородной изотропной среде все компоненты поля – решения системы уравнений Максвелла –

$$\operatorname{rot} H = i\omega\varepsilon_0\varepsilon E, \quad \operatorname{rot} E = -i\omega\mu_0\mu H$$

выражаются через потенциальные функции – решения уравнения Гельмгольца.

$$\Delta\varphi + k^2\varphi = 0, \quad k^2 = \omega^2\mu_0\mu\varepsilon_0\varepsilon.$$

С помощью этих представлений граничные задачи для системы сводятся к соответствующим граничным задачам для уравнения Гельмгольца.

В классической теории потенциала различают объемные и поверхностные потенциалы. Это разделение в общей схеме метода потенциальных функций можно свести к следующему: если решения исходного уравнения рассматривать в некоторой области, то решения потенциального уравнения могут быть определены или в этой же области, или на ее границе. Возможен случай, когда решения исходного и потенциального уравнений заданы на множествах, связанных друг с другом более сложным образом.

Метод интегральных преобразований также можно рассматривать как один из вариантов МПО. Действительно, используя терминологию обзора [5], назовем интегральным преобразованием линейный интегральный оператор, действующий из одного пространства функций в другое,

$$T : f(x) \mapsto F(\xi),$$

если, что выполнены два условия:
1) существует обратный оператор

$$T^{-1} : F(\xi) \mapsto f(x)$$

(*формула обращения*) и
2) найдется пара таких операторов D и M, что выполняется равенство

$$TD = MT$$

(*формула коммутации*), где оператор M "лучше", чем D.

Для интегрального преобразования Фурье, например,

$$D : f(x) \mapsto f'(x), \quad M : F(\xi) \mapsto i\xi F(\xi).$$

Основная идея метода интегральных преобразований состоит в следующем: если функция u – решение уравнения $Du = v$, то $TDu = Tv$ и из формулы коммутации следует, что $MTu = Tv$. Отсюда можно найти функцию Tu и, применив формулу обращения, искомую функцию u.

Если преобразовать формулу коммутации к виду

$$DT^{-1} = T^{-1}M,$$

то, легко видеть, получим равенство (А) при $S = D$, $P = M$ и $R = Q = T^{-1}$.

Для вещественной системы уравнений Коши-Римана в плоской области Ω

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

одним из потенциальных уравнений в Ω, как известно, является уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0.$$

Если перейти к комплексным функциям (комплекснозначным функциям комплексного переменного), то потенциальной для системы Коши-Римана будет любая аналитическая в Ω функция

$\Phi(z)$, $z = x + iy$, при этом $u(x, y) = \operatorname{Re}\Phi(z)$, $v(x, y) = \operatorname{Im}\Phi(z)$, а потенциальным уравнением –

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\bar{z}} = 0, \quad z \in \Omega, \qquad \frac{\partial}{\partial\bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

В лекции методом потенциальных операторов исследуются системы l линейных уравнений с частными производными 1-го порядка относительно m искомых функций, зависящих от n переменных

$$\sum_{|\alpha|\leq 1} A_\alpha(x) D^\alpha u(x) = 0, \tag{B}$$

где мультииндекс $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$, $\alpha_i \geq 0$, $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} ... D_n^{\alpha_n}$, $D_i = \partial/\partial x_i$, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$; $A_\alpha(x)$ – заданные матрицы размера $l \times m$, $u = u(u_1, ..., u_m)$ – искомая вектор-функция, $x = (x_1, ..., x_n) \in R^n$. В качестве потенциальных уравнений рассматриваются линейные уравнения 2-го порядка

$$\sum_{|\gamma|\leq 2} a_\gamma(x) D^\gamma \varphi(x) = 0, \tag{C}$$

здесь $a_\gamma(x)$ – скалярные функции. Соответствие между решениями (B) и (C) устанавливает формула

$$u(x) = \sum_{|\beta|\leq 1} h_\beta(x) D^\beta \varphi(x), \tag{D}$$

где β – мультииндекс, $h_\beta(x)$ – m–мерные вектор-функции.

Такой подход позволяет применить хорошо развитую теорию уравнений 2-го порядка для исследования систем 1-го порядка, в частности, определить структуру решений систем, произвести их классификацию, дать новое определение типа системы и т.д. С одной стороны, МПО позволяет подойти с единых позиций к изучению систем различных типов (эллиптического, гиперболического, параболического, смешанного, составного и др.), а с другой стороны – учесть особенности, присущие системам определенного типа.

При подготовке лекции использованы работы [8], [9], [10], [11], [12] и [13]. Нумерация формул и теорем в каждом параграфе независимая.

§1. Системы уравнений с частными производными и их потенциальные уравнения

1^0. Пусть область $\Omega \subset R^n$. Рассмотрим в Ω систему (B) уравнений с частными производными 1-го порядка. Поставим вопрос: когда выражение (D), где $\varphi(x)$ – решение уравнения с частными производными 2-го порядка (C), будет решением системы (B)? Очевидно, это будет не всегда, а лишь при выполнении некоторых условий, связывающих коэффициенты $A_\alpha(x)$, $h_\beta(x)$ и $a_\gamma(x)$.

Если при любом решении φ уравнения (C) выражение (D) является решением системы (B), то будем называть (C) *потенциальным уравнением* системы (B), а (D) – *представлением решений* системы (B). Решения уравнения (C) будем называть *потенциальными функциями* или просто потенциалами. Начнем со случая, когда рассматриваются классические решения системы (B) и уравнения (C). Будем предполагать, что $A_\alpha(x) \in C(\Omega)$, $u \in C^1(\Omega)$, $h_\beta \in C^1(\Omega)$, $a_\gamma(x) \in C(\Omega)$, $\varphi \in C^2(\Omega)$.

Лемма 1 . *Если* $A_\alpha(x) \in C^1(\Omega)$, $h_\beta(x) \in C^1(\Omega)$, $\varphi \in C^2(\Omega)$, *то*

$$\sum_{|\alpha|\leq 1} A_\alpha D^\alpha \left(\sum_{|\beta|\leq 1} h_\beta D^\beta \varphi \right) = \sum_{|\gamma|\leq 2} b_\gamma D^\gamma \varphi, \qquad (1)$$

где l-мерные вектор-функции $b_\gamma(x) \in C(\Omega)$, причем

$$b_0 = \sum_{|\alpha|\leq 1} A_\alpha D^\alpha h_0, \quad b_\gamma = A_\gamma h_0 + \sum_{|\beta|\leq 1} A_\beta D^\beta h_\gamma \quad \forall\gamma, \quad |\gamma| = 1,$$

$$2b_{\beta+\gamma} = A_\beta h_\gamma + A_\gamma h_\beta \quad \forall\beta,\ \gamma, \quad |\beta| = 1,\ |\gamma| = 1. \qquad (2)$$

Действительно, применяя в левой части (1) обобщенную формулу Лейбница

$$D^\alpha(uv) = \sum_{|\xi|\leq\alpha} C_\alpha^\xi D^{\alpha-\xi} u D^\xi v$$

и подставляя в правую часть (1) выражения (2) для b_γ, получим тождество.

Теорема 1 . *Уравнение (C) - потенциальное уравнение системы (B), а (D) - соответствующее ему представление решений тогда и только тогда, когда существует вектор-функция* $\omega(x) \in C(\Omega)$ *такая, что*

$$\sum_{|\alpha|\leq 1} A_\alpha D^\alpha h_0 = a_0\omega, \tag{3}$$

$$A_\alpha h_0 + \sum_{|\beta|\leq 1} A_\beta D^\beta h_\alpha = a_\alpha\omega \quad \forall\alpha, |\alpha| = 1, \tag{4}$$

$$A_\alpha h_\beta + A_\beta h_\alpha = 2a_{\alpha+\beta}\omega \quad \forall\alpha,\beta, |\alpha| = 1, |\beta| = 1\,. \tag{5}$$

Доказательство. Обе части выражения (1) будут тождественным нулем при любом φ - решении уравнения (C), если в каждой компоненте (1) можно выделить множитель, представляющий собой стоящее в левой части уравнения (C) выражение, то есть если $b_\gamma(x) = a_\gamma(x)\omega(x)$ $\forall\gamma$, $|\gamma| \leq 2$, где $\omega(x)$ - некоторый l-мерный вектор. А тогда утверждение теоремы следует из леммы 1. Что касается формул (3)-(5), то их можно получить, если подставить в систему (B) выражение (D) и, вычитая из полученного результата умноженное на $\omega(x)$ уравнение (C), приравнять нулю коэффициенты при всех производных функции φ.

Замечание 1. Существуют системы вида (B), решения которых нельзя представить в виде (D), то есть системы, не имеющие потенциальных уравнений 2-го порядка в смысле данного в этом параграфе определения. Например, решения системы уравнений Максвелла можно выразить через решения уравнения Гельмгольца, но в представление входят также вторые производные потенциальной функции.

Ниже будет рассмотрен случай, когда система, представление и потенциальное уравнение содержат производные любых порядков.

Введем более широкое определение. Система p уравнений с частными производными 2-го порядка

$$\sum_{|\gamma|=2} a_\gamma^k(x) D^\gamma \varphi^k(x) + \sum_{j=1}^{p} \sum_{|\gamma|\leq 1} a_\gamma^{k,j} D^\gamma \varphi^j(x) = 0, \quad k = \overline{1,p} \tag{6}$$

называется *потенциальной* для системы (B), если при любых ее решениях $\varphi^1(x), \ldots, \varphi^p(x)$ выражение

$$u(x) = \sum_{j}^{p} \sum_{|\beta| \le 1} h_\beta^j(x) D^\beta \varphi^j(x) \tag{7}$$

является решением системы (B). Если система (6) является потенциальной для системы (B), то ее решения $\varphi^1(x), \ldots, \varphi^p(x)$ будем называть *потенциальными функциями*, а выражение (7) – *представлением* (частным) *решений* системы (B). Каждое потенциальное уравнение вида (C) можно рассматривать как частный случай ($p = 1$) потенциальной системы (6). Если же уравнения в системе (6) окажутся независимыми, то каждое из них будет потенциальным уравнением для системы (B). Отметим, что в k-е уравнение системы (6) входят старшие (вторые) производные только k-й искомой функции.

Имеет место утверждение, полностью аналогичное утверждению теоремы 1. Оно будет получено как частный случай более общего утверждения.

Замечание 2. Если (C) - потенциальное уравнение системы (B), то в общем случае не все решения системы (B) можно представить в виде (D). Иными словами, в общем случае одного потенциального уравнения недостаточно для описания множества всех решений системы. Например, для частного случая системы уравнений Максвелла потенциальных уравнений должно быть два.

Ниже будет рассмотрен вопрос о числе потенциальных уравнений, необходимых и достаточных для описания всего множества решений исходной системы.

Замечание 3. Если рассматривать неоднородную систему вида (B) и неоднородное потенциальное уравнение вида (C), то, очевидно, в искомом представлении решений системы также должен присутствовать свободный член $g(x)$. Тогда к системе векторных равенств (3)-(5) добавится еще одно. Если выбрать в качестве $g(x)$ любое частное решение неоднородной системы, то все потенциальные уравнения системы будут однородными.

2^0. Рассмотрим теперь обобщенные решения системы (B) и уравнения (C). В тех случаях, когда это не вызывает сомнения, будем использовать единые обозначения как для пространства скалярных функций, так и для пространства вектор-функций, каждая компонента которых принадлежит соответствующему пространству функций. Обозначим через (u, v) скалярное произведение вектор-функций u и v, через $< \varphi, \tilde{\varphi} >$ – значение функционала φ на элементе $\tilde{\varphi}$. Предположим для простоты, что $A_\alpha(x), h_\beta(x), a_\gamma(x) \in C^\infty(\Omega)$.

Пусть $D'(\Omega)$ – пространство распределений над $D(\Omega)$ (то есть над $C^\infty(\Omega)$ с соответствующим образом введенной топологией). Тогда обобщенное решение уравнения (C) – это такое распределение $\varphi \in D'(\Omega)$, что

$$< \varphi, \sum_{|\gamma|\leq 2} (-1)^{|\gamma|} D^\gamma(a_\gamma \tilde{\varphi}) >= 0 \quad \forall \tilde{\varphi} \in D'(\Omega).$$

Обобщенное решение системы (B) – это такое распределение $u \in D'(\Omega)$, что

$$< u, \sum_{|\alpha|\leq 1} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha(A_\alpha^* \tilde{u}) >= 0 \quad \forall \tilde{u} \in D^l(\Omega),$$

здесь A_α^* – транспонированная матрица $A_\alpha, \tilde{u} = (\tilde{u}_1, ..., \tilde{u}_l)$.

Лемма 2 . *Если $A_\alpha(x) \in C^2(\Omega)$, $h_\beta(x) \in C^1(\Omega)$, $\tilde{u}(x) \in C_\gamma^2(\Omega)$, то*

$$\sum_{|\beta|\leq 1} (-1)^{|\beta|} D^\beta (h_\beta, \sum_{|\alpha|\leq 1} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (A_\alpha^* \tilde{u})) = \sum_{|\gamma|\leq 2} (-1)^{|\gamma|} D^\gamma (b_\gamma, \tilde{u}), \tag{8}$$

где вектор-функции b_γ, $|\gamma| \leq 2$, определены формулами (2).

Доказательство. Пусть $\tilde{u} \in C^{2,l}(\Omega)$, $\varphi \in C^{2,1}(\Omega)$. Умножим обе части (1) скалярно на $\tilde{u}$ и проинтегрируем по частям левый и правый интегралы. Тогда слева получим

$$\int \Big(\sum_{|\alpha|\leq 1} A_\alpha D^\alpha \big(\sum_{|\beta|\leq 1} h_\beta D^\beta \varphi \big), \tilde{u} \Big) dx =$$

$$= \int \Big(\sum_{|\beta|\leq 1} h_\beta D^\beta \varphi, \sum_{|\alpha|\leq 1} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha A_\alpha^* \tilde{u} \Big) dx =$$

$$= \int \Big(\varphi \sum_{|\beta|\le 1} (-1)^{|\beta|} D^\beta h_\beta, \sum_{|\alpha|\le 1} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha A_\alpha^* u\Big) dx,$$

а справа -

$$\int \Big(\sum_{|\gamma|\le 2} b_\gamma D^\gamma \varphi, \tilde{u}\Big) dx = \int \varphi \sum_{|\gamma|\le 2} (-1)^{|\gamma|} D^\gamma (b_\gamma, \tilde{u}) dx.$$

Из равенства полученных интегралов, очевидно, следует (8).

Равенство (D) будем теперь понимать как равенство двух функционалов над $D(\Omega)$. Введем определение произведения распределения и вектора. Если $\varphi \in D'(\Omega)$ – распределение над скалярным пространством, h – некоторый вектор, то *произведением* $h\varphi$ назовем распределение (над векторным пространством) такое, что

$$< h\varphi, u >=< \varphi, (h, \tilde{u}) > \quad \tilde{u} \in D^l(\Omega).$$

Тогда (D) равносильно следующему равенству:

$$< u, \tilde{u} >=< \varphi, \sum_{|\beta|\le 1} (-1)^{|\beta|} D^\beta h_\beta, u > \quad \tilde{u} \in D^l(\Omega). \tag{9}$$

Теорема 2 . *Если φ – обобщенное решение уравнения (С) и при некотором $\omega(x) \in C^\infty(\Omega)$ выполняются условия (3) - (5), то (D) – обобщенное решение системы (В).*

Доказательство. Пусть $\tilde{u} \in D^l(\Omega)$. В силу (9) и леммы 2 с учетом того, что φ – обобщенное решение (С), получим

$$< u, \sum_{|\alpha|\le 1} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (A_\alpha^* \tilde{u}) >=$$

$$=< \varphi, \sum_{|\beta|\le 1} (-1)^{|\beta|} D^\beta (h_\beta, \sum_{|\alpha|\le 1} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha A_\alpha^* \tilde{u}) >=$$

$$=< \varphi, \sum_{|\gamma|\le 2} (-1)^{|\gamma|} D^\gamma (a_\gamma(\omega, \tilde{u})) >= 0, \quad \text{здесь} \quad \tilde{\varphi} = (\omega, \tilde{u}).$$

Следовательно, u – обобщенное решение (В).

Рассмотрим частный случай, когда $u \in L_1^{loc}(\Omega), \varphi \in L_1^{loc}(\Omega)$. В этом случае распределение, которое является интегральным функционалом, отождествляется с самой функцией. Теперь $u \in L_1^{loc}(\Omega)$ – обобщенное решение системы (B), если

$$\int (u, \sum_{|\alpha|\leq 1} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (A_\alpha^* \tilde{u}))dx = 0 \quad \forall \tilde{u} \in C_0^1(\Omega)); \qquad (10)$$

$\varphi \in L_1^{loc}(\Omega)$ - обобщенное решение уравнения (C), если

$$\int \varphi \sum_{|\gamma|\leq 2} (-1)^{|\gamma|} D^\gamma (a_\gamma \tilde{\varphi})dx = 0 \quad \forall \tilde{\varphi} \in C_0^2(\Omega). \qquad (11)$$

В рассматриваемом случае естественно понимать равенство (D) в формально обобщенном смысле, то есть считать, что

$$\int (u, \tilde{\psi})dx = \int \varphi \sum_{|\beta|\leq 1} (-1)^{|\beta|} D^\beta (h_\beta, \tilde{\psi})dx \quad \forall \tilde{\psi} \in C_0^1(\Omega). \qquad (12)$$

Покажем, что для (10), (12) утверждение теоремы 2 не имеет места. Действительно, пусть $\tilde{u} \in C_0^1(\Omega)$. Рассмотрим выражение

$$\int (u, \sum_{|\alpha|\leq 1} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (A_\alpha^* \tilde{u}))dx$$

и $\tilde{\psi} = \sum_{|\alpha|\leq 1} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (A_\alpha^* \tilde{u})$. Очевидно, в общем случае $\tilde{\psi} \in C_0(\Omega)$, но $\tilde{\psi} \notin C_0^1(\Omega)$.

Если определить обобщенное решение системы (B) как те $u \in L_1^{loc}(\Omega)$, которые удовлетворяют интегральному тождеству (10) $\forall \tilde{u} \in C_0^2(\Omega)$, то $\tilde{\psi} \in C_0^1(\Omega)$ и в силу леммы 2 и интегрального тождества (11), которое справедливо и при $\tilde{\varphi} = (\omega, \tilde{u}) \in C_0^2(\Omega)$, получим

$$\int (u, \sum_{|\alpha|\leq 1} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (A_\alpha^* \tilde{u}))dx =$$

$$= \int \varphi \sum_{|\beta|\leq 1} (-1)^{|\beta|} D^\beta (h_\beta, \sum_{|\alpha|\leq 1} D^\alpha (A_\alpha^* \tilde{u}))dx = 0.$$

В этом случае утверждение теоремы 2 сохраняется.

Наконец, если рассматривать как обобщенные все производные функций, входящих в формулы (B) – (C), то эти равенства выполняются почти всюду, и, следовательно, все рассуждения п.1^0 остаются в силе при переходе от классических решений (B), (C) к обобщенным.

3^0 . Предположим, что в (B) $l = m$,

$$\det A_\alpha \neq 0 \quad \forall\alpha, \quad |\alpha| = 1, \tag{13}$$

и рассмотрим (5) как систему линейных алгебраических уравнений для определения h_β и ω при $|\beta| = 1$, нетривиальное решение которой существует тогда и только тогда, когда

$$\begin{gathered}\det(a_{2\alpha}A_\beta A_\alpha^{-1} + a_{2\beta}A_\alpha A_\beta^{-1} - 2a_{\alpha+\beta}E) = 0 \\ \forall\alpha,\beta,\ |\alpha| = 1,\ |\beta| = 1,\end{gathered} \tag{14}$$

здесь и далее E – единичная матрица. Так как условия (14) связывают между собой коэффициенты при старших производных в потенциальных уравнениях (C), их следует рассматривать как *условия согласования типов* системы (B) и ее потенциальных уравнений. Эти условия представляют собой алгебраические уравнения степени m относительно коэффициентов a_γ, $|\gamma| = 2$ при старших производных уравнения (C). Следовательно, число потенциальных уравнений системы (B) зависит от числа корней уравнений (14). Обозначим эти корни через $\xi_1, \xi_2, ... \xi_s$, $s = mn(n-1)/2$.

Заметим, что условие (13) можно ослабить и заменить предположением о невырожденности хотя бы одной из матриц A_α, $|\alpha| = 1$.

Введем следующие переобозначения: $h_0 = h_\mu$ при $|\mu| = 0$, $\mu = (\mu_1, ..., \mu_n)$ – мультииндекс; $h_i = h_\mu$ при $\mu = (0, ..., \mu_i, ..., 0)$, $\mu_i = 1$, $i = \overline{1,n}$; $h_{ij} = h_{ji} = h_\mu$ при $\mu = (0, ..., \mu_i, ..., \mu_j, ..., 0)$, $\mu_i = \mu_j = 1$, $i \neq j$; $h_{ii} = h_\mu$ при $\mu = (0, ..., \mu_i, ..., 0)$, $\mu_i = 2$; $D = \sum\limits_{i=1}^{n} A_i(x)D_i$. В новых обозначениях формулы (B) – (C) примут вид

$$Du(x) + A_0(x)u(x) = 0, \tag{15}$$

$$u(x) = h_0(x)\varphi(x) + \sum_{i=1}^{n} h_i(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}, \tag{16}$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial\varphi^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} + a_0(x)\varphi = 0. \qquad (17)$$

Если (17) – потенциальное уравнение системы (13), то в силу теоремы 1 (при условии $\det A_1 \neq 0$) его коэффициенты $\{a_{ij}\}$ можно определить из эквивалентных (14) условий

$$\det[a_{11}(A_iA_1^{-1}A_j + A_jA_1^{-1}A_i) - 2(a_{1j}A_i + a_{1i}A_j - a_{ij}A_1)] = 0, \quad i,j = \overline{2,n}, \qquad (18)$$

а коэффициенты представления (16) – из соотношений

$$Dh_0 + A_0h_0 - \tfrac{a_0}{a_{11}}A_1h_1 = 0,$$

$$Dh_j + A_0h_j + A_jh_0 - \tfrac{a_j}{a_{11}}A_1h_1 = 0, \ \ j = \overline{1,n}, \qquad (19)$$

$$h_j = (-A_1^{-1}A_j + 2\tfrac{a_{1j}}{a_{11}}E)h_0, \ \ j = \overline{2,n},$$

здесь $a_{11} \neq 0$, если положить $\omega = A_1\,h_1/a_{11}$.

Не уменьшая общности можно считать, что $A_1 = E$, $a_{11} \equiv 1$.

Систему (15) при $A_1 = E$ будем называть *простейшей*, если $A_jA_0 = A_0A_j$, $j = \overline{2,n}$ и *нормальной*, если $A_jA_0 = -A_0A_j$, $j = \overline{2,n}$.

Термин "нормальная система" был предложен И.Н.Векуа [6] для эллиптической системы двух уравнений $u_x - v_y = au + bv$, $u_y + v_x = bu - av$, которая может быть записана в комплексной форме как $w_{\bar z} = B\bar w, w = u + iv, z = x + iy$. В [7] эллиптическая система $u_x - v_y = au + bv$, $u_y - v_x = -bu + av$, комплексная форма записи которой $w_{\bar z} = Aw$, названа простейшей. Там же аналогичная классификация распространена на линейные гиперболические системы двух уравнений. Определения, данные выше, обобщают понятия простейшей и нормальной систем на случай систем любого типа с произвольным числом уравнений и искомых функций, зависящих от $n \geq 2$ аргументов.

Рассмотрим случай, когда матрицы A_i обладают свойством

$$A_iA_j = \chi A_jA_i, \quad i,j = \overline{2,n}, \quad i \neq j, \quad \chi = const.$$

Тогда система для определения h_0, h_1 примет вид

$$Dh_0 + A_0h_0 - a_0h_1 = 0, \quad Dh_1 + A_0h_1 - a_1h_1 + h_0 = 0,$$

$$(\chi - 1)A_j(E\frac{\partial h_1}{\partial x_1} + A_j\frac{\partial h_1}{\partial x_j}) - 2S_jh_1+$$

$$+[(\chi + 1)A_j - 2a_{1j}E]h_0 = 0, \ j = \overline{2,n}, \tag{20}$$

$$S_j = \tfrac{1}{2}[D(A_j - 2a_{1j}E) + A_0A_j - \chi A_jA_0+$$

$$+a_jE + a_1(\chi A_j - 2a_{1j}E)], \ j = \overline{2,n}.$$

Если потенциальное уравнение не содержит смешанных производных, то есть $a_{ij} \equiv 0, \ i \neq j$, а в системе (11) матрицы A_i коммутативны ($\chi = 1$) или антикоммутативны ($\chi = -1, \ A_i \neq E, \ i = \overline{2,n}, \ n > 2$), то вторые равенства из (20) можно записать следующим образом:

$$S_jh_1 - A_jh_0 = 0, \quad j = \overline{2,n}, \quad \text{или}$$

$$A_j\frac{\partial h_1}{\partial x_1} + A_j^2\frac{\partial h_1}{\partial x_j} + S_jh_jh_0 = 0, \quad j = \overline{2,n}.$$

При этом в силу (18)

$$\det(a_{ii}E + A_i^2) = 0, \quad i = \overline{2,n},$$

то есть, коэффициенты потенциальных уравнений при $\partial\varphi/\partial x_i^2$ являются собственными числами квадрата матрицы коэффициентов системы при $\partial u/\partial x_i$. Кроме того, при $\chi = 1$ в системе (15) должно быть не меньше, чем $n - 2$ вырожденных матриц.

При $n = 2$ в предположении, что $\det A_2 \neq 0$, имеем при $\chi = -1$

$$u = Sh_1\varphi + Eh_1\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} - A_2h_1\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}, \tag{21}$$

$$Dh_1 + (A_0 + S - a_1E)h_1 = 0, \quad S = A_2^{-1}S_2 - A_0 + a_1E,$$

$$S\frac{\partial h_1}{\partial x_2} + A_2S\frac{\partial h_1}{\partial x_2} + [D(S) + A_0S - a_0E]h_1 = 0. \tag{22}$$

Если матрицы A_2 и S коммутативны,

$$A_2S = SA_2, \tag{23}$$

то классы соответствующих друг другу при $n = 2$ систем (15) и уравнений (17), в которых a_{22} находится из условия

$$\det(a_{22}A_1 + a_{11}A_2A_1^{-1}A_2) = 0 \tag{24}$$

при $A_1 = E$, $a_{11} \equiv 1$, определяются из соотношения

$$[D(S) - S^2 + A_0S - SA_0 + a_1S - a_0E]h_1 = 0, \tag{25}$$

при этом h_1 – частное решение первой из систем (22). Условие (23) выполняется, например, для простейших систем с постоянной или кусочно-постоянной матрицей A_2 .

Если условие (23) не выполняется, то соответствующие друг другу системы и уравнения определяются условием (24) и условием

$$(\frac{\partial P}{\partial x_1} - \frac{\partial Q}{\partial x_2} + PQ - QP)h_1 = 0, \tag{25}$$

$$P = (SA_2 - A_2S)^{-1}[D(S) - S^2 + A_0S - SA_0 +_1 aS - a_0E],$$

$$Q = -A_2P - S - A_0 + a_1E,$$

h_1 – частное решение переопределенной системы уравнений

$$\frac{\partial h_1}{\partial x_1} = Qh_1, \quad \frac{\partial h_1}{\partial x_2} = Ph_1, \tag{26}$$

совместной в силу (25). Отсюда следуют

Утверждение 1. *Представление решений (21) простейших систем (15) при $n = 2$ не содержит матрицы A_0 .*

Теорема 3 . *При $n = 2$ любая простейшая система линейных уравнений 1-го порядка с постоянными или кусочно-постоянными коэффициентами при частных производных имеет потенциальное уравнение*

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2} + a\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2} = 0, \tag{27}$$

постоянный или кусочно-постоянный коэффициент $a = a_{22}$ которого находится из (24), а представление решений такой системы имеет вид

$$u = Eh_1\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} - A_2h_1\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}. \tag{28}$$

Доказательство. Пусть A_2 - постоянная или кусочно-постоянная в Ω матрица. Тогда $S = (a_2 A_2^{-1} + a_1 E)/2$ и, следовательно, при $a_1 = a_2 = 0$ $S = 0$, то есть представление (21) принимает вид (28). Так как $A_2 A_0 = A_0 A_2$, то выполняется (23), а тогда из (25) следует, что при $a_1 = a_2 = 0$ $a_0 = 0$.

Замечание. Утверждение теоремы 3 не относится к нормальным системам с постоянной или кусочно-постоянной матрицей A_2. В качестве примера можно рассмотреть нормальную систему с постоянной невырожденной матрицей A_0. Попытка построить для этой системы потенциальное уравнение вида (27) приводит к противоречию с условием (26).

§2. Классификация систем уравнений с частными производными первого порядка

1^0. Для квазилинейных уравнений с частными производными 2-го порядка классическая классификация в точке по типу основана на приведении к каноническому виду квадратичной формы, ассоциированной с уравнением. Каждое такое уравнение, рассматриваемое в отдельной точке, может в этой точке принадлежать только одному из трех основных типов и линейной заменой независимых переменных приводится в окрестности данной точки к соответствующему каноническому виду.

Для систем уравнений с частными производными 1-го порядка тип системы обычно определяют по свойствам характеристического уравнения или через главный символ. В случае двух независимых переменных тип системы с главной частью $u_x + A(x,y)u_y$ в точке (x,y) определяют по собственным значениям матрицы $A(x_0, y_0)$. Существуют системы уравнений 1-го порядка и системы более высоких порядков, которые не могут быть отнесены ни к эллиптическим, ни к гиперболическим, ни к параболическим в точке системам. Например, уже для системы трех уравнений возможен случай, когда одно из собственных значений матрицы коэффициенов вещественно, а два других – комплексно сопряжены. Такие системы называют системами составного типа.

В §1 было установлено, сколько потенциальных уравнений

2-го порядка требуется для того, чтобы с помощью соответствующих представлений решений описать все множество решений системы (B) с постоянными коэффициентами. Естественно понимать в этом случае под типом системы (B) *совокупность типов* соответствующих ей потенциальных уравнений.

Пусть коэффициенты системы уравнений с частными производными 1-го порядка являются функциями двух аргументов x, y. Как следует из теоремы 3, система

$$a_{2,0}\varphi_{xx} + a_{1,1}\varphi_{xy} + a_{0,2}\varphi_{yy} + a_1\varphi_x + a_2\varphi_y + a_0\varphi = 0 \tag{1}$$

из p уравнений, связывающих p функций $\varphi_j(x, y)$ $(a_\gamma(x, y)$ – матрицы размера $p \times p)$, является потенциальной для системы $(l = m)$

$$u_x + A(x, y)u_y + B(x, y)u = 0, \tag{2}$$

представления решений которой имеют вид

$$u = g\varphi + h\varphi_x + k\varphi_y \tag{3}$$

$(g, h, k$ – матрицы размера $m \times p)$, тогда и только тогда, когда существует матрица $\omega(x, y)$ размера $m \times p$ такая, что выполнены условия

$$h = \omega a_{2,0}, \quad k + Ah = \omega a_{1,1}, \quad Ak = \omega a_{0,2}$$

$$\begin{gathered} g + h_x + Ah_y + Bh = \omega a_1, \\ Ag + k_x + Ak_y + Bk = \omega a_2, \\ g_x + Ag_y + Bg = \omega a_0. \end{gathered} \tag{5}$$

Будем предполагать пока, что $p = m$, т.е. число уравнений и потенциальных функций в системе (1) совпадает с числом уравнений и числом искомых функций в исходной системе.

Потенциальную систему (1) будем называть *полной потенциальной системой*, если 1) при любом u – решении системы (2) разрешима система уравнений

$$g\varphi + h\varphi_x + k\varphi_y = u \tag{6}$$

и 2) любое решение системы (6) является решением системы (1).

Это означает, что любое решение системы (2) можно представить в виде (3), где φ - решение системы (1). Иными словами, формула (3) дает общее решение системы (2). Сразу заметим, что система (2) разрешима, вообще говоря, не однозначно. Конкретному решению u системы (2) может соответствовать некоторый класс решений φ системы (1), найденных из (6).

Определять тип системы (2) как совокупность типов входящих в потенциальную систему (1) уравнений целесообразно в тех случаях, когда система (2) распадается на независимые потенциальные уравнения или когда по крайней мере главные части входящих в нее уравнений в значительной степени независимы друг от друга. Однако это ограничение не является существенным, так как если $g(x,y)$, $h(x,y)$, $k(x,y)$ – произвольно выбранные матрицы, то из условий (4), (5) следует, что при $\det\omega(x,y) \neq 0$ по ним однозначно определяются коэффициенты потенциальной системы $a_{2,0}$, $a_{1,1}$, $a_{0,2}$, a_1, a_2 и a_0. Следовательно, для исходной системы уравнений 1-го порядка (2) существует бесконечно много потенциальных систем вида (1) и имеется возможность среди всех потенциальных систем выбирать наиболее простые по форме (например, если это возможно, распадающиеся на независимые уравнения).

2^0. Рассмотрим подробнее случай двух независимых переменных ($n = 2$). Пусть в потенциальной системе (1) $a_{2,0}(x,y) \equiv E$, $\quad a_{1,1}(x,y) \equiv 0$. Тогда условия (4) примут вид

$$h = \omega, \quad k = -A\omega, \quad A^2\omega = -\omega a_{0,2}. \tag{7}$$

Предположим, что в произвольно выбранной точке (x,y) матрица $A(x,y)$ имеет собственные значения произвольных алгебраических кратностей и каждому собственному значению $\lambda_k(x,y)$ соответствует в базисе пространства C^m жорданова цепочка из векторов $h_1^k(x,y), \dots, h_{s_k}^k(x,y)$, удовлетворяющих уравнениям (2.4). Пусть, кроме того, значения $\lambda_k(x,y)$ могут быть продолжены в некоторую окрестность точки (x,y) так, что при этом сохраняются их алгебраическая и геометрическая кратности. Построим матрицу $\omega(x,y)$ из векторов $h_1^1(x,y), \dots, h_{s_1}^1(x,y), \dots, h_1^n(x,y), \dots,$ $h_{s_n}^n(x,y)$ как из столбцов. Тогда в блочной матрице $\omega^{-1}A\omega$ вдоль главной диагонали будут расположены блоки размера $s_k \times s_k$ вида

$$\begin{pmatrix} \lambda_k(x,y) & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_k(x,y) & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_k(x,y) \end{pmatrix}, \tag{8}$$

а блочная матрица

$$a_{0,2} = -\omega^{-1} A^2 \omega \tag{9}$$

будет состоять из блоков вида

$$\begin{pmatrix} -\lambda_k^2(x,y) & -2\lambda_k(x,y) & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\lambda_k^2(x,y) & -2\lambda_k(x,y) & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 00 & \dots & -\lambda_k^2(x,y) & \end{pmatrix}. \tag{10}$$

В частном случае, когда все собственные значения $\lambda_k(x,y)$, $k = \overline{1,m}$, матрицы $A(x,y)$ различны, $A(x,y)h^k(x,y) = \lambda_k(x,y)h^k(x,y)$, $k = \overline{1,m}$, и матрица $\omega(x,y)$ составлена из собственных векторов $h^k(x,y)$ как из столбцов, матрица

$$a_{0,2} = -\omega^{-1} A^2 \omega = \begin{pmatrix} -\lambda_1^2(x,y) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\lambda_2^2(x,y) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -\lambda_m^2(x,y) \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Если в соответствии с изложенным в §1 искать решение системы (2) в виде

$$u = \sum_{j=1}^{m} u_j(x,y) h^j(x,y), \tag{12}$$

считая, что

$$h_x^j + A h_y^j + B h^j = \sum_{k=1}^{m} \alpha_{j,k} h^k, \tag{13}$$

то

$$u_{j_x} + \lambda_j u_{j_y} + \sum_{k=1}^{m} \alpha_{k,j} u_k = 0. \tag{14}$$

Если теперь взять такие функции $\varphi^j(x,y)$, $j = \overline{1,m}$, что

$$\varphi_x^j - \lambda_j \varphi_y^j = u_j, \quad j = \overline{1,m}, \tag{15}$$

то они будут решениями потенциальной системы

$$\varphi^j_{xx} - \lambda_j^2 \varphi^j_{yy} - (\lambda_{j_x} + \lambda_j \lambda_{j_y})\varphi^j_y + \sum_{k=1}^{m} \alpha_{k,j}(\varphi^k_x - \lambda_k \varphi^k_y) = 0, \quad j = \overline{1,m}. \tag{16}$$

Главные части потенциальных уравнений этой системы независимы, но в каждом из них содержатся, вообще говоря, все потенциальные функции и их первые производные. Если матрицы коэффициентов при младших производных одновременно имеют верхнюю или нижнюю треугольную форму, то эту систему можно рассматривать как цепочку связанных потенциальных уравнений.

Если для некоторого значения j существует скалярная функция $l_j(x, y)$ такая, что

$$h^j_x + Ah^j_y + Bh^j = l_j h^j, \tag{17}$$

то потенциальное уравнение с номером j

$$\varphi^j_{xx} - \alpha_j^2 \varphi^j_{yy} + l^j \varphi^j_x - (\lambda_{j_x} + \lambda_j \lambda_{j_y} + \lambda_j l_j)\varphi_y = 0 \tag{18}$$

полностью независимо по отношению к другим потенциальным уравнениям и

$$\varphi^j = (\varphi^j_x - \lambda_j \varphi^j_y)h^j \tag{19}$$

– соответствующее частное представление решений исходной системы уравнений.

Если дополнительно предположить $g(x, y) \equiv 0$, $a_0(x, y) \equiv 0$, то получим

$$a_1 = \omega^{-1}(\omega_x + A\omega_y + B\omega), \quad a_2 = \omega^{-1}(k_x + Ak_y + Bk). \tag{20}$$

Случай, когда собственные значения матрицы $A(x, y)$ образуют непересекающиеся или совпадающие в рассматриваемой области ветви, не вносит особых затруднений в общую схему рассуждений. Действительно, при любой матрице $\omega(x, y)$, $\det \omega(x, y) \neq 0$ можно построить потенциальную систему и соответствующее представление решений исходной системы уравнений с частными производными. Вопрос только в том, насколько удобной может быть структура матрицы $a_{0,2}$, что обеспечивается за счет выбора $\omega(x, y)$.

В случае, когда число независимых переменных больше двух, любая невырожденная матрица $\omega(x_1, ..., x_n)$ также позволяет построить потенциальную систему и соответствующее представление решений исходной системы. Но, очевидно, в общем случае только одна из функциональных матриц, составленных из коэффициентов потенциальной системы, может быть приведена к нормальной жордановой форме за счет выбора матрицы ω.

3^0. Будем называть *типом системы* уравнений с частными производными 1-го порядка совокупность типов уравнений 2-го порядка, образующих полную потенциальную систему, точнее – совокупность типов подсистем, образующих полную потенциальную систему.

Убедимся в том, что такое определение не противоречит общепринятым определениям типа системы (по главному символу системы, по характеру собственных значений матрицы A и др.).

С этой целью исследуем главный символ потенциальной системы (1) в случае двух независимых переменных при сделанных ранее предположениях. Матрица главного символа потенциальной системы

$$a(x, y; \xi, \eta) = E\xi^2 + a_{0,2}\eta^2 \tag{21}$$

является блочной матрицей, каждый блок ее представляет собой верхнюю треугольную матрицу вида

$$\begin{pmatrix} \xi^2 - \lambda_j^2(x,y)\eta^2 & -2\lambda_j(x,y)\eta^2 & -\eta^2 & 0 & \dots \\ 0 & \xi^2 - \lambda_j^2(x,y)\eta^2 & -2\lambda_j(x,y)\eta^2 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \end{pmatrix}.$$

Определитель матрицы $a(x, y; \xi, \eta)$ равен произведению определителей, входящих в матрицу блоков, т.е.

$$\det a(x, y; \xi, \eta) = \prod_{j=1}^{n} \det a^j(x, y; \xi, \eta) = \prod_{j=1}^{n} (\xi^2 - \lambda_j^2(x,y)\eta^2)^{s_j}, \tag{22}$$

где s_j – размерность соответствующего инвариантного подпространства, $\det a^j$ – определитель j-ого блока потенциальной системы.

Предположим, что исходная система уравнений с частными производными 1-го порядка (2) является эллиптической, т.е. все собственные значения $\lambda_j(x, y)$ матрицы $A(x, y)$ комплекснозначны. Очевидно, в этом случае $\xi^2 - \lambda_j(x, y)\eta^2 \neq 0 \quad \forall(\xi, \eta) \neq 0$, $j = \overline{1, n}$, и, следовательно, $\det a^j(x, y; \xi, \eta) \neq 0$, $\forall(\xi, \eta)$, $\forall j$. Но это означает, что все потенциальные подсистемы, образующие полную потенциальную систему, являются эллиптическими. Обратное утверждение очевидно.

Пусть теперь исходная система 1-го порядка (2) гиперболическая, т.е. все $\lambda_j(x, y)$, $j = \overline{1, n}$, вещественны. Запишем условие нехарактеристичности потенциальной системы (1):

$$\det a(x, y; \mu, \nu) \neq 0.$$

В силу (21), (22) это условие можно переписать в виде

$$\det(E\mu^2 + a_{0,2}\nu^2) = \prod_{j=1}^{n} \det a^j(x, y; \mu, \nu) = \prod_{j=1}^{n} (\mu^2 - \lambda_j^2\nu^2)^{s_j} \neq 0,$$

т.е. направление (μ, ν) является нехарактеристическим, если $\mu \neq \pm\lambda_j \nu \quad \forall j$. Рассмотрим уравнение

$$\det a(x, y; \xi + t\mu, \eta + t\nu) = 0, \tag{23}$$

которое с учетом (21), (22) можно записать так:

$$\prod_{j=1}^{n} \left[(\xi + t\mu)^2 - \lambda_j^2(\eta + t\nu)\right]^{s_j}. \tag{24}$$

Очевидно, (24) выполняется, если хотя бы для некоторого значения j справедливо равенство

$$(\xi + t\mu)^2 - \lambda_j^2(\eta + t\nu)^2 = 0. \tag{25}$$

Уравнение (25) в силу нехарактеристичности направления (μ, ν) имеет вещественные корни

$$t = \frac{\pm\lambda_j\eta - \xi}{\mu \mp \lambda_j\nu}.$$

Следовательно, уравнение (23) имеет только вещественные корни. Но это означает, что все потенциальные подсистемы, образующие полную потенциальную систему (1), являются гиперболическими.

Заметим, что сформулированное выше определение типа системы уравнений с частными производными 1-го порядка является более точным по сравнению с классическим определением типа системы. Действительно, если рассмотреть систему составного эллиптико-гиперболического типа, у которой среди собственных чисел матрицы A имеются как комплексные, так и вещественные, то в соответствии с новым определением типа можно не только поставить в соответствие исходной системе полную потенциальную систему уравнений 2-го порядка, но и конкретизировать ее структуру, а также в зависимости от свойств собственных значений $\{\lambda_j\}$ определить число эллиптических и гиперболических потенциальных подсистем, образующих полную потенциальную систему.

§3. Модельные системы уравнений.

1^0. В $\Omega \in R^2$ рассмотрим систему (15), §1 при $l = m$, $A_1 = E$. Для удобства обозначим $x = x_1, y = x_2$.

Пусть $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_k)$ – упорядоченный мультииндекс, то есть $\alpha_i < \alpha_{i+1}$, $i = \overline{1, k-1}$, $\alpha_k \le m$. Будем говорить, что уравнения системы с номерами α_j, $j = \overline{1, k}$, $1 < k < m$, в которых оставлены компоненты вектор-функции u только с теми же номерами, *образуют подсистему системы (15), §1, соответствующую мультииндексу* α. Если $\beta = (\beta_1, ..., \beta_{m-k})$ – упорядоченный мультииндекс, дополняющий α до полного набора чисел $1, ..., m$, то порождаемые мультииндексами α и β подсистемы будем называть *дополняющими друг друга.*

При необходимости можно рассматривать набор упорядоченных мультииндексов β^j, дополняющих α до полного набора чисел $1, ..., m$.

Назовем систему уравнений

$$Eu_x + A_2(x, y)u_y + A_0(x, y)u = 0 \qquad (1)$$

модельной системой эллиптического, гиперболического или составного эллиптико-гиперболического типа,. если элементы матрицы $A_2 = A_{ij}$ удовлетворяют следующим условиям: $A_{ij} = 0$, $j \ne m - i + 1$, $|A| = 1$, $j = m - i + 1$.

Обозначим $\nu_1 = A_{1m}$, $\nu_2 = A_{2,m-1}$, ..., $\nu_m = A$. Тогда левую часть характеристического уравнения модельной системы (1) $\det(A_2 - \nu E) = 0$ можно записать в виде

$$\det(A_2 - \nu E) = \tag{2}$$

$$= \begin{cases} (-1)^{m_1} \prod_{i=1}^{m_1} (\nu^2 - \nu_i \nu_{m-i+1}), & m = 2m_1, \\ (-1)^{m_1+1} (\nu - \nu_{m+1}) \prod_{i=1}^{m_1} (\nu^2 - \nu_i \nu_{m-i+1}), & m = 2m_1 + 1. \end{cases}$$

Не уменьшая общности будем считать, что $\nu_i > 0$, $k < i \leq m$. Тогда из (2) следует, что при $k = m$ модельная система является гиперболической, при $k = m/2$ (m – четное) - эллиптической, в остальных случаях ($m/2 < k < m$) относится к модельным системам составного типа.

При $m = 2$ модельные формы являются каноническими. Эллиптические системы $2m$ уравнений 1-го порядка

$$u_x - v_y = A_1 u + B_1 v, u_y + v_x = A_2 u + B_2 v$$

(u, v – m-мерные вектор-функции, A_1, A_2, B_1, B_2 – матрицы размера $m \times m$) также являются модельными. Чтобы убедиться в этом, достаточно записать оба векторных уравнения в виде одного для новой неизвестной вектор-функции $(u_1, ..., u_m, v_m, ... v_1)$. Таким образом, модельные формы обобщают канонические формы систем двух линейных уравнений эллиптического и гиперболического типа (а также параболического, составного и смешанного) на случай произвольного числа уравнений, хотя они и не являются каноническими в том смысле, что не любая система (1) может быть приведена к модельной форме линейной заменой искомых функций и независимых переменных.

Отметим следующие очевидные свойства матрицы A_2 для модельных систем эллиптического и гиперболического типа:

$$\det A_2 \neq 0,\ A_2^4 = E,\ A_2^2 = \mp E \tag{3}$$

(здесь и далее верхний знак соответствует эллиптическому случаю, нижний – гиперболическому).

Для модельных систем простейшего и нормального вида можно определить структуру матрицы A_0.

Утверждение 1. *Модельная система уравнений (1) эллиптического, гиперболического и составного типа является простейшей тогда и только тогда, когда элементы матрицы* $A_0 = \{A_{ij}^0\}$ *удовлетворяют условиям*

$$A_{ij}^0 = A_{m-i+1,m-j+1} \qquad \text{при} \quad \nu_i\nu_j = \nu_{m-i+1}\nu_{m-j+1} = 1,$$

$$A_{ij}^0 = -A_{m-i+1,m-j+1}^0 \qquad \text{при} \quad \nu_i\nu_j = \nu_{m-i+1}\nu_{m-j+1} = -1,$$
$$1 \le i, j \le m,$$

$$A_{ij}^0 = A_{m-i+1,m-j+1}^0 = 0 \quad \text{при} \quad \nu_i\nu_j \ne \nu_{m-i+1}\nu_{m-j+1}$$

и является нормальной тогда и только тогда, когда

$$A_{ij}^0 = -A_{m-i+1,m-j+1}^0 \qquad \text{при} \quad \nu_i\nu_j = \nu_{m-i+1}\nu_{m-j+1} = 1,$$

$$A_{ij}^0 = A_{m-i+1,m-j+1}^0 \qquad \text{при} \quad \nu_i\nu_j = \nu_{m-i+1}\nu_{m-j+1} = -1,$$
$$1 \le i, j \le m,$$

$$A_{ij}^0 = A_{m-i+1,m-j+1}^0 = 0 \quad \text{при} \quad \nu_i\nu_j \ne \nu_{m-i+1}\nu_{m-j+1}.$$

Для модельных систем эллиптического и гиперболического типа можно ввести классификацию на базе определений простейшей и нормальной системы, введенных в §1.

Теорема 1 . *Любая модельная система уравнений эллиптического или гиперболического типа или является простейшей, или приводится к нормальному виду линейной невырожденной заменой искомых функций.*

Доказательство. Предположим, что $A_2A_0 \ne A_0A_2$. С помощью замены $u = Cv$, $\det C \ne 0$, приведем систему (1) к виду

$$v_x + C^{-1}A_2Cv_y + C^{-1}[A_0C + D(C)]v = 0.$$

Пусть новая система модельная и нормальная. Тогда матрица C удовлетворяет двум условиям: $A_2C = CA_2$ и

$$D(C) + \frac{1}{2}(A_0 + A_2^{-1}A_0A_2)C = 0. \tag{4}$$

Для эллиптических и гиперболических систем матрица $A_0 + A_2^{-1}A_0A_2$ коммутирует с A_2 (см. третье из свойств (3)) и, следовательно, матричное уравнение (4) является простейшим.

С другой стороны, если C – такое решение (4), что $A_2C = CA_2$, $\det C \neq 0$, то замена $u = Cv$, очевидно, приводит систему (1) к нормальному виду.

Покажем теперь, что искомое решение матричного уравнения (4) существует. Пусть $m = 2m_1$ (при $m = 2m_1 + 1$ схема доказательства та же), G – модельная матрица размера $m_1 \times m_1$, в которой $g_{1m_1} = g_{2,m_1-1} = \ldots = g_{m_11} = 1$, T – блочная матрица размера $2m_1 \times 2m_1$,

$$T = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} E & \omega G \\ G & -\omega E \end{pmatrix},$$

где $\omega = \sqrt{\mp 1}$. Умножим матричное уравнение (4) слева на T, а затем перейдем к характеристическим переменным $\xi = x + \omega y$, $\eta = x - \omega y$ и к новой неизвестной матричной функции с помощью замены $C = T^{-1}V$. В силу того, что уравнение (4) простейшее и, следовательно, структура матрицы $A_0 + A_2^{-1}A_0A_2$ определена в соответствии с утверждением 1, получим

$$V_{1\eta} + B_1V_1 = 0, \quad V_{2\xi} + B_2V_2 = 0, \tag{5}$$

где V_1, V_2 – неизвестные матричные функции размера $m_1 \times m_1$, а элементы матриц B_1, B_2 линейно выражаются через элементы A_0 . Очевидно, существует невырожденное решение V_1, V_2 матричных уравнений (5). Тогда

$$C = T^{-1}\begin{pmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & V_2 \end{pmatrix}$$

будет решением простейшего модельного матричного уравнения (4), причем $\det C = \pm\omega\sqrt{2}\det V_1 \cdot \det V_2 \neq 0$, а матрица $C + \omega^2A_2CA_2$ будет коммутативным с C невырожденным решением уравнения (4), $\det(C + \omega^2A_2CA_2) = \pm 2\omega\sqrt{2}\det V_1 \cdot \det V_2 \neq 0$.

Введенная классификация распространяется и на матричные модельные уравнения $D(U) + A_0U = 0$, в которых каждый столбец искомой матричной функции U размера $m \times m$ является решением модельной системы (1).

Можно рассматривать модельные системы смешанного и составного типа.

Назовем дополняющие друг друга подсистемы *независимыми*, если все отличные от нуля элементы матриц A_2 и A_0 системы (1) попадают в матрицы либо одной, либо другой рассматриваемой подсистемы.

Систему уравнений (1) назовем *распадающейся*, если у нее существуют хотя бы две независимые дополняющие друг друга подсистемы. В противном случае систему (1) будем называть *нераспадающейся*.

Все распадающиеся модельные системы составного типа делятся на четыре класса: простейшие, простейшие-нормальные, нормальные-простейшие и нормальные.

2^0. Поскольку в R^2 всегда можно в качестве потенциальных уравнений выбирать уравнения, удовлетворяющие условию (24), §1, условие согласования типов для модельных систем примет вид

$$\prod_{i=1}^{m}(a_{22}+\nu_i\nu_{m-i+1}a_{11})=0. \tag{6}$$

Пусть $a_{11}\equiv 1$. Тогда в силу (6) потенциальные уравнения модельной системы (1), не принадлежащей к системам составного типа, имеют вид

$$\varphi_{xx}\pm\varphi_{yy}+a_1(x,y)\varphi_x+a_2(x,y)\varphi_y+a_0(x,y)\varphi=0 \tag{7}$$

в случае эллиптических и гиперболических систем,

$$\varphi_{xx}+sgny\varphi_{yy}+a_1(x,y)\varphi_x+a_2(x,y)\varphi_y+a_0(x,y)\varphi=0 \tag{8}$$

в случае систем смешанного эллиптико-гиперболического типа,

$$\varphi_{xx}+y^m\varphi_{yy}+a_1(x,y)\varphi_x+a_2(x,y)\varphi_y(x,y)+a_0(x,y)\varphi=0$$

для вырождающихся систем с линией вырождения $y=0$,

$$\varphi_{xx}+a_1(x,y)\varphi_x+a_2(x,y)\varphi_y+a_0(x,y)\varphi=0 \tag{9}$$

для систем параболического типа и т.д.

Следующие две теоремы и следствия из них указывают на различия между простейшими и нормальными модельными эллиптическими и гиперболическими системами с точки зрения структуры их решений.

Теорема 2 . *Для того, чтобы решения простейшей модельной системы эллиптического или гиперболического типа были представимы в виде (21), §1 при $S = (a_1 E \mp a_2 A_2)/2$ через решение φ потенциального уравнения (7), необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты a_1, a_2, a_0 удовлетворяли условию*

$$(a_{1x} + a_{2y} + \frac{1}{2}a_1^2 \pm \frac{1}{2}a_2^2 - 2a_0)^2 \pm (a_{1y} \mp a_{2x})^2 = 0. \qquad (9)$$

Доказательство. В силу $A_2 A_0 = A_0 A_2$ выполняется (23), §1, тогда при $a_{11} \equiv 1$ S принимает указанный вид, а из (24), §1 следует уравнение (10).

Следствие 1 . *Уравнение $\varphi_{xx} \pm \varphi_{yy} = 0$ является потенциальным для простейшей модельной системы эллиптического или гиперболического типа.*

Простейшая модельная эллиптическая или гиперболическая система уравнений не имеет потенциальных уравнений вида $\varphi_{xx} \pm \varphi_{yy} + \lambda^2\varphi = 0$, $\lambda = const > 0$.

Модельная система (1) эллиптического, гиперболического, смешанного, составного и смешанно-составного эллиптико-гиперболического типа при $A_0 \equiv 0$ (а также при $A_2 A_0 = 0$) является простейшей.

Теорема 3 . *Для того, чтобы решения нормальной модельной системы эллиптического или гиперболического типа были представимы в виде (21), §1 при $S = (-2A_0 + a_1 E \mp a_2 A_2)/2$ через решение φ потенциального уравнения (7), достаточно (при предположении, что $\det A_0 \neq 0$), чтобы вектор-функция h_1 удовлетворяла системам уравнений (25), (26), §1 в которых*

$$P = \frac{1}{2}A_2^{-1}A_0^{-1}\left[\frac{1}{2}D(-2A_0 + a_1 E \mp a_2 A_2) + A_0^2 - a_1 A_0 \pm a_2 A_2 A_0 + sE\right],$$

$$Q = -A_2 P + \frac{1}{2}(a_1 E \pm a_2 A_2), \quad s = \frac{1}{4}(a_1^2 \pm a_2^2 - 4a_0).$$

Утверждение теоремы и все указанные формулы являются следствием "модельности" и "нормальности" рассматриваемой системы и могут быть получены из (25), (26), §1.

Следствие 2 . *Нормальная модельная система эллиптического или гиперболического типа с постоянной матрицей A_0 не имеет потенциальных уравнений вида $\varphi_{xx} \pm \varphi_y = 0$.*

Из условия согласования типов (6) и теоремы следует, что при описании решений системы составного типа необходимо рассматривать потенциальные уравнения разных типов. Например, модельной системе составного эллиптико-гиперболического типа соответствуют, как минимум, два уравнения вида (7), системе составного эллиптико-гиперболо-параболического типа – три уравнения: два вида (7) и уравнение вида (9), системе смешанно-составного типа – одно или два уравнения (7), уравнение (8) и, возможно, (9), и т.д.

§4. Поляризация решений систем уравнений с постоянными коэффициентами.

1^0. Рассмотрим частный случай системы (1) с постоянными коэффициентами

$$u_x + Au_y + Bu = 0, \tag{1}$$

здесь A, B – заданные постоянные квадратные матрицы размером $m \times m$, u – искомая вектор-функция двух независимых переменных x, y со значениями в m-мерном векторном пространстве.

Начнем с наиболее простого частного случая, когда система (1) имеет вид

$$u_x + Au_y = 0. \tag{2}$$

Будем предполагать, что в общем случае A – комплексная матрица, u – комплекснозначная вектор-функция.

Теорема 1 . *Если λ – собственное значение матрицы A^2, h – соответствующий ему собственный вектор, то вектор-функция $u = \varphi_x h - \varphi_y Ah$, где φ – решение уравнения $\varphi_{xx} - \varphi_{yy} = 0$, – решение системы (2).*

Доказательство. Справедливость утверждения теоремы проверяется непосредственной подстановкой выражения $u = \varphi_x h - \varphi_y Ah$ в систему (2). Отсюда следует, что если $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ – простые собственные значения матрицы A^2, то любому решению φ^j

любого уравнения $\varphi_{xx} - \lambda_j \varphi^j_{yy} = 0$ соответствует некоторое решение $u^j = \varphi^j_x h_j - \varphi^j_y A h_j$ системы (2). Таким образом, система (2) допускает m различных независимых потенциальных уравнений.

Теорема 2 . *Если все собственные значения $\lambda_1, .., \lambda_m$ матрицы A^2 различны и $h^1, .., h^m$ - соответствующие им собственные векторы, то общее решение системы (2) имеет вид*

$$u = \sum_{j=1}^{m} (\varphi^j_x - \sqrt{\lambda_j} \varphi^j_y) h^j , \tag{3}$$

где потенциальные функции φ^j удовлетворяют потенциальным уравнениям $\varphi^j_{xx} - \lambda^j \varphi^j_{yy} = 0 \quad \forall j = \overline{1, m}$.

Доказательство. В силу теоремы 1 выражение (3) будет решением системы (2). Собственные векторы $h^1, ..., h^m$ матрицы A^2 образуют базис в C^m. Пусть $u(x, y)$ - произвольное решение системы, $u^j(x, y)$ - коэффициенты разложения его по базису. Найдутся функции $\varphi^j(x, y)$, удовлетворяющие уравнениям $\varphi^j_x - \lambda_j \varphi^j_y = u^j$, $j = \overline{1, m}$. Подставив $u = u^1 h^1 + ... + u^m h^m$ в систему (3), получим $u^j_x + \lambda_j u^j_y u = 0$, $j = \overline{1, m}$. Тогда функции φ^j являются решениями уравнений $\varphi^j_{xx} - \lambda_j \varphi^j_{yy} = 0$, $j = \overline{1, m}$. Таким образом, в рассматриваемом случае для определения множества всех решений системы (2) необходимо и достаточно ровно m независимых потенциальных уравнений.

Пусть матрица A^2 имеет собственное значение λ кратности s и ему соответствует ровно s линейно независимых собственных векторов $h_1, ..., h_s$ (геометрическая кратность собственного значения совпадает с алгебраической). Тогда система (2) допускает s одинаковых потенциальных уравнений $\varphi^k_{xx} - \lambda \varphi yy^k = 0$, $k = \overline{1, s}$, и каждому такому уравнению соответствуют решения системы (2) вида $u^k = \varphi^k_x h_k - \varphi^k_y A h_k$, $k = \overline{1, s}$. Если все векторы h_k являются также собственными векторами матрицы A, то все решения u^k системы (2) линейно независимы и имеет место утверждение, аналогичное утверждению теоремы 2. В общем случае векторы h_k могут и не быть собственными векторами матрицы A.

Выделим случай, когда число уравнений в полной потенциальной системе может быть меньше m. Пусть среди линейно независимых собственных векторов, соответствующих одному и тому же собственному значению λ матрицы A^2, имеются такие два вектора h_k и h_1, что вектор Ah_k коллинеарен вектору h_1. Тогда и вектор Ah_1 коллинеарен вектору h_k. Не уменьшая общности можно считать, что $Ah_k = h_1$ и $Ah_1 = \lambda h_k$. Разлагая проекцию произвольного решения u системы (2) на линейное подпространство, порожденное векторами h_k и h_1, получим выражение вида $u^k h_k + u^1 h_1$. Коэффициенты этого разложения удовлетворяют системе уравнений $u^k_x + \lambda u^1_y = 0$, $u^1_x + u^k_y = 0$. Пусть функция φ такова, что $\varphi_x = u^k, \varphi_y = -u^1$. Как следует из полученных выше уравнений, эта система совместна и ее решение удовлетворяет уравнению $\varphi_{xx} - \lambda\varphi_{yy} = 0$. Следовательно, паре собственных векторов h_k, h_1 матрицы A^2 соответствует только одно потенциальное уравнение 2-го порядка.

В дальнейшем удобнее рассматривать в пространстве значений искомых решений системы (2) базис, порожденный матрицей A, вместо базиса, порожденного матрицей A^2 . Если h – собственный вектор матрицы A, соответствующий собственному значению λ, то h – собственный вектор матрицы A^2 , соответствующий собственному значению λ^2. Поэтому после перехода к новому базису утверждения теорем 1 и 2 сохраняются, если внести незначительные изменения.

2^0. Пусть матрица A имеет собственные значения произвольной алгебраической кратности. Пространство значений решений системы (3) раскладывается на прямую сумму корневых подпространств ([14], лекция 17) инвариантных относительно A. Каждое корневое подпространство или является неразложимым циклическим инвариантным подпространством, или, в свою очередь, разложимо в прямую сумму неразложимых циклических инвариантных подпространств ([15], гл. VIII).

Пусть пространство C^m распалось на n неразложимых циклических инвариантных подпространств (т.е. подпространств с геометрической кратностью единица). В подпространстве с номером k размерности s_k, соответствующем одному из собственных значений λ_k, построим базис (жорданову цепочку) из векторов $h^k_1, ..., h^k_{s_k}$, удовлетворяющих уравнениям

$$Ah^k_1 = \lambda_k h^k_1, \quad Ah^k_2 = \lambda_k h^k_2 + h^k_1, ..., \quad Ah^k_{s_k} = \lambda_k h^k_{s_k} + h_{s_k-1}, \quad (4)$$

причем таких, что уравнение $Ah = \lambda_k h + h_s^k$ неразрешимо. Совокупность всех векторов $h_1^k, \ldots, h_{s_k}^k$ по всем инвариантным подпространствам образует базис в C^m.

Представим произвольное решение u системы (3) в виде суммы его проекций на все инвариантные циклические подпространства. Пусть u^k проекция u на k-е подпространство. Будем искать u^k в виде

$$u^k = \sum_{j=1}^{s_k} (\varphi_x^{k,j} h_j^k - \varphi_y^{k,j} A h_j^k),$$

где $\varphi^{k,j}$ - некоторые скалярные функции. В силу (4)

$$u = \sum_{j=1}^{s_k - 1} (\varphi_x^{k,j-\lambda_k} \varphi_y^{k,j+1}) h_j^k + (\varphi_x^{k,s} - \lambda_k \varphi_y^{k,s}) h_{s_k}^k. \qquad (5)$$

Разложим вектор u^k по базису $h_1^k, \ldots h_{s_k}^k$, пусть $u^k = u_1^k h_1^k + \ldots + u_{s_k}^k h_{s_k}^k$. Рассмотрим функции $\varphi^{k,j}$, $j = \overline{1,s}$, удовлетворяющие уравнениям

$$\varphi_x^{k,j} - \lambda_k \varphi_y^{k,j} - \varphi_y^{k,j+1} = u, \quad j = \overline{1, s_k - 1}, \quad \varphi_x^{k,s_k} - \lambda_k \varphi_y^{k,s_k} = u_{s_k}^k. \qquad (6)$$

Подставив (5) в систему (2), получим, что

$$(u_j^k)_x + \lambda_k (u_j^k)_y + (u_{j+1}^k)_y = 0, \quad j = \overline{1, s_k - 1}, \quad (u_{s_k}^k) + \lambda_k (u_{s_k}^k) = 0.$$

Отсюда следует, что функции $\varphi^{k,j}$ удовлетворяют уравнениям с частными производными 2-го порядка

$$\varphi_{xx}^{k,j} - \lambda_k^2 \varphi_{yy}^{k,j} = 2\lambda_k \varphi_{yy}^{k,j+1} + \varphi_{yy}^{k,j+2}, \quad j = \overline{1, s_k - 2}.$$

$$\varphi_{xx}^{k,s_k-1} - \lambda_k^2 \varphi_{yy}^{k,s_k-1} = 2\lambda_k \varphi_{yy}^{k,s_k}, \qquad (7)$$

$$\varphi_{xx}^{k,s_k-2} - \lambda_k^2 \varphi_{yy}^{k,s_k} = 0.$$

Итак, имеет место

Теорема 3 . *Пусть матрица A имеет собственные значения произвольных алгебраических кратностей и пространство C^m разлагается в прямую сумму n неразложимых циклических* *инвариантных подпространств с размерностями s_k, $k = \overline{1,n}$. Тогда общее решение системы (2) имеет вид*

$$u = \sum_{k=1}^{n}\Big[\sum_{j=1}^{s_k-1}(\varphi_x^{k,j} - \lambda_k\varphi_y^{k,j} - \varphi_y^{k,j})h_j^k + (\varphi_x^{k,s_k} - \lambda_k\varphi_y^{k,s_k})h_{s_k}^k\Big], \quad (8)$$

где $\varphi^{k,j}$ – решения потенциальных уравнений (7).

В случае, когда все инвариантные циклические подпространства одномерны, теорема 2 является простым следствием теоремы 3.

Таким образом, любое решение системы (3) может быть представлено как сумма решений той же системы, значения которых лежат в неразложимых циклических инвариантных подпространствах пространства C^m. Это явление будем называть *поляризацией* решений системы (2).

3^0. Пусть теперь A – вещественная матрица, и значения искомого решения системы (2) лежат в R^m. Если матрица A имеет только вещественные собственные значения, то имеет место утверждение, полностью аналогичное утверждению теоремы 3. Если же матрица A имеет комплексные собственные значения, то дело обстоит несколько сложнее.

Теорема 4 . *Пусть среди собственных значений матрицы A имеются комплексные. Тогда вещественное общее решение системы (2) дается формулой (8), в которой слагаемые, соответствующие каждым двум неразложимым циклическим инвариантным подпространствам, построенным по комплексным собственным значениям $\lambda_k = \alpha_k + i\beta_k$, $\bar\lambda_k = \alpha_k - i\beta_k$, можно записать в виде*

$$(\psi_x^{k,2s_k-1} - \alpha_k\psi_y^{k,s_k-1} + \beta_k\psi_y^{k,2s_k})g_{2s_k-1}^k +$$

$$+\sum_{j=1}^{s_k-1}(\psi_x^{k,2j-1} - \alpha_k\psi_y^{k,2j-1}\beta_k\psi_y^{k,2j} - \psi_y^{k,2j+1})g_{2j-1}^k +$$

$$+\sum_{j=1}^{s_k-1}(-\psi_x^{k,2j} + \alpha_k\psi_y^{k,2j} + \beta_k\psi_y^{k,2j-1} + \psi_y^{k,2j-2})g_{2j},$$

где $g^k_{2j-1} = 2Reh^k_j$, $g^k_{2j} = 2Imh^k_j$ *и* $\psi^{k,j}$ *- решения цепочки вещественных систем из двух уравнений*

$$\begin{cases} \psi^{k,2s_k-1}_{xx} + (\beta^2_k - \alpha^2_k)\psi^{k,2s_k-1}_{yy} + 2\alpha_k\beta_k\psi^{k,2s_k}_{yy} & = 0, \\ \psi^{k,2s_k}_{xx} + (\beta^2_k - \alpha^2_k)\psi^{k,2s_k}_{yy} - 2\alpha_k\beta_k\psi^{k,2s_k-1}_{yy} & = 0, \end{cases} \qquad (9)$$

$$\begin{cases} \psi^{k,2s_k-3}_{xx} + (\beta^2_k - \alpha^2_k)\psi^{k,2s_k-1}_{yy} + 2\alpha_k\beta_k\psi^{k,2s_k-2}_{yy} & = \\ e\psi^{k,2s_k-2}_{xx} + (\beta^2_k - \alpha^2_k)\psi^{k,2s_k-2}_{yy} - 2\alpha_k\beta_k\psi^{k,2s_k-3} & = \end{cases}$$

$$= 2\alpha_k\psi^{k,2s_k-1}_{yy} - 2\beta_k\psi^{k,2s_k}_{yy}.$$

$$= 2\beta_k\psi^{k,2s_k-1}_{yy} + 2\alpha_k\psi^{k,2s_k}_{yy},$$

. . . .

Доказательство. Пусть λ_k - комплексное собственное значение матрицы A. Так как A - вещественная матрица, то она имеет комплексно сопряженное собственное значение $\bar{\lambda}_k$ той же кратности. В силу теоремы 3 общее решение системы (2) со значениями в C^m дается формулой (8), где $\varphi^{k,j}$ - решения потенциальных уравнений из цепочек (7). Если по собственному значению λ_k в одном из комплексных инвариантных подпространств был построен базис $h_1, ..., h_{s_k}$, то, очевидно, собственному значению $\bar{\lambda}_k$ будет соответствовать циклическое инвариантное подпространство с базисом $\bar{h}^k_1, ..., \bar{h}^k_{s_k}$. Коэффициенты разложения произвольного вещественного решения системы (2) по базису из комплексно сопряженных векторов также будут попарно комплексно сопряжены. Если комплексные потенциальные функции $\varphi^{k,j}$ удовлетворяют уравнениям (6), то уравнениям

$$\varphi^{k,s_k}_x - \bar{\lambda}_k\varphi^{k,s_k}_y = \bar{u}^k_{s_k}, \quad \varphi^{k,j}_x - \bar{\lambda}_k\varphi^{k,j}_y - \varphi^{k,j+1} = \bar{u}^k_j, \quad j = \overline{1, s_k - 1}$$

удовлетворяют комплексно сопряженные функции $\overline{\varphi^{k,j}}$, которые будут решениями цепочки уравнений, являющихся комплексно сопряженными по отношению к уравнениям (7). Тогда вещественное общее решение системы (2) с вещественной матрицей даст та же формула (8), в которой комплексно сопряженным собственным значениям будут соответствовать комплексно сопряженные слагаемые. Переходя от пар функций $\varphi^{k,j}$, $\overline{\varphi^{k,j}}$ к вещественным функциям $\psi^{k,2j+1} = 2Re\varphi^{k,j}$, $\psi^{k,2j} = 2Im\varphi^{k,j}$, $j = \overline{1, s_k}$, получим выражение в формуле (8) и цепочки вещественных систем из двух уравнений (9) вместо уравнений (7).

4^0. Рассмотрим теперь систему уравнений с частными производными 1-го порядка с постоянными коэффициентами вида (1).

Пусть построенные по матрице A векторы h_j^k, образуют базис в пространстве C^m. Упорядочим их естественным образом: $h_1^1, \ldots, h_{s_1}^1, \ldots, h_1^n, \ldots h_{s_n}^n$. Пусть u – произвольное решение системы (1). Разложим по базису пространства C^m вектор-функцию u и векторы Bh_j^k:

$$u = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{s_k} u_j^k h_j^k.$$

$$Bh_j^k = \sum_{l=1}^{n} \sum_{i=1}^{s_1} b_{j,i}^{k,l} h_i^l, \quad k = \overline{1,n}, \quad j = \overline{1, s_s}.$$

Подставив разложение u в систему (1) и приравняв нулю коэффициенты при векторах h_j^k, получим систему уравнений

$$(u_j^k)_x + \lambda_k (u_j^k)_y + (u_{j+1}^k)_y + \sum_{l=1}^{n} \sum_{i=1}^{s_1} b_{i,j}^{l,k} u_i^l = 0, \quad j = \overline{1, s_{k-1}}, \tag{10}$$

$$(u_{s_k}^k)_x + \lambda_k (u_{s_k}^k)_y + \sum_{l=1}^{n} \sum_{i=1}^{s_1} b_{i,s_k}^{l} u_i^l = 0, \quad k = \overline{1,n}.$$

Пусть функции $\varphi^{k,j}$ таковы, что

$$\varphi_x^{k,j} - \lambda_k \varphi_y^{k,j} - \varphi_y^{k,j+1} + \sum_{l=1}^{n} \sum_{i=1}^{s_1} b_{i,s_k}^{l} \varphi_j^{k,i} = u_j^k, \quad j = \overline{1, s_k - 1},$$

$$\varphi_x^{k,s_k} - \lambda_k \varphi_y^{k,s_k} + \sum_{l=1}^{n} \sum_{i=1}^{s_1} b_{i,s_k}^{l,k} \varphi_j^{k,i} = u, \quad k = \overline{1,n}. \tag{11}$$

Подставив левые части этих формул в уравнения (10), получим систему потенциальных уравнений, в каждом из которых содержатся "главные" слагаемые вида $\varphi_{xx}^{k,j} - \lambda_k^2 \varphi_{yy}^{k,j}$ и могут содержаться вторые производные функций $\varphi^{k,j+1}$ и $\varphi^{k,j+2}$, а также в общем случае все остальные потенциальные функции и их первые частные производные.

Представляет практический интерес выделить класс систем (1), построение решений которых сводится к построению решений потенциальных уравнений 2-го порядка, образующих цепочки.

Теорема 5 . *Если матрица B имеет нижнюю треугольную форму в базисе h_j^k пространства C^m, построенном по матрице A, то общее решение системы (1) имеет вид*

$$u = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{s_k}(\varphi_x^{k,j}h_j^k - \varphi_y^{k,j}Ah_j^k + \varphi_k^j Bh_j^k), \tag{12}$$

где $\varphi^{k,j}$ - решения цепочки потенциальных уравнений.

Доказательство. Предположим, что матрица B имеет нижнюю треугольную форму, это значит, что каждый вектор Bh_j^k выражается через линейную комбинацию векторов базиса, стоящих слева от вектора h_j^k в общем списке, то есть

$$Bh_j^k = \sum_{l=1}^{j-1}\sum_{i=1}^{s_l} b_{j,i}^{k,l}h_i^l + \sum_{i=1}^{j} b_{j,i}^{k,k}h_i^k.$$

В этом случае уменьшается число слагаемых в суммах в формулах (11) и (12) и тогда каждое потенциальное уравнение можно записать так: левая часть имеет вид

$$\varphi_{xx}^{k,j} - \lambda_k^2\varphi_{yy}^{k,j} + a_1^{k,j}\varphi_x^{k,j} + a_2^{k,j}\varphi_y^{k,j} + a_0^{k,j}\varphi^{k,j},$$

а в правой части содержатся вместе с первыми частными производными потенциальные функции, стоящие слева от $\varphi^{k,j}$ в общем списке $\varphi^{1,1}, \ldots, \varphi^{1,s_1}, \ldots, \varphi^{n,1}, \ldots, \varphi^{n,s_n}$. Последнее уравнение в последней цепочке содержит только потенциальную функцию φ^{n,s_n}
.

Заметим, что если все собственные значения матрицы A различны, то матрица B в базисе h_j^k может иметь как нижнюю, так и верхнюю треугольную форму. Более того, для построения цепочки потенциальных уравнений и цепочки граничных задач для них достаточно предполагать, что матрицы A и B в некотором базисе пространства C^m имеют одновременно верхнюю или нижнюю треугольную форму. Цепочка потенциальных уравнений существенно упрощается, если пространство C^m распадается на неразложимые циклические инвариантные подпространства, инвариантные как по отношению к матрице A, так и по отношению к матрице B. Это имеет место, например, если матрицы A и B коммутативны [15], гл.VII.

Утверждение теоремы 5 легко переносится на случай, когда рассматриваются вещественные решения системы (1) с вещественными матрицами.

Литература

[1] Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. Часть II. – М.: Наука, 1980.

[2] Вайнберг М.М. Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений. – М.: Наука, 1972.

[3] Гаевский Х., Грегор К., Захариас К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1978.

[4] Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966.

[5] Федорюк М.В. Интегральные преобразования // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления / ВИНИТИ. – 1986. – 15. – С.211–253.

[6] Векуа И.Н. Системы дифференциальных уравнений эллиптического типа // Мат. сб. – 1952. – 31(73), №2. – С.217–314.

[7] Плещинская И.Е. К решению задачи с краевыми условиями общего вида для системы уравнений смешанного типа // Теория функций комплексного переменного и краевые задачи. – Чебоксары: Изд-во Чувашск. гос. ун-та, 1979. – С.82–98.

[8] Плещинская И.Е. Задача типа Трикоми для одной системы уравнений смешанного типа второго рода // Тр. сем. по краевым задачам. – Казань: Изд-во Казанск. ун-та. – 1980. – №17. – С.124–132.

[9] Плещинская И.Е. Некоторые неинтегральные представления решений эллиптических и гиперболических систем уравнений с частными производными первого порядка // Дифференциальные уравнения (в частных производных). – Рязань. – 1980. – С.63-72.

[10] Плещинская И.Е. Об эквивалентности некоторых классов эллиптических и гиперболических систем первого порядка и уравнений второго порядка с частными производными // Диф. уравн. – 1987. – 23, №9. – С.1634–1637.

[11] Плещинская И.Е. О модельных системах линейных уравнений с частными производными первого порядка эллиптико-гиперболического типа // Докл. расшир. засед. сем. ин-та прикл. мат. им. И.Н.Векуа. – Тбилиси, 1988. – Т.3, №1. – С.150–153.

[12] Pleshchinskaya I.E. Method of potential equations in the theory of systems of the first-order linear partial-differential equations // Pitman Research Notes in Math. Series. Longman Scientific & Technical. – 1991. – P.29-47.

[13] Плещинская И.Е.,Плещинский Н.Б. Об одном алгоритме решения граничных задач для систем уравнений с частными производными 1-го порядка с постоянными коэффициентами // Исслед. по прикладной матем., вып. 20, 1992. – С. 97-107.

[14] Постников М.М. Линейная алгебра. – М.: Наука, 1986.

[15] Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: ГИТТЛ, 1953.